物理ベースのCG流体表現

土橋宜典
北海道大学大学院情報科学研究科
http://ime.ist.hokudai.ac.jp/~doba
doba@ime.ist.hokudai.ac.jp

内容

- 非圧縮性流体解析の基礎
- 応用例

流体解析手法の利用

- 非圧縮性Navier-Stokes方程式
  - 流体の動きを記述する方程式の一つ

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \upsilon\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f} \quad \text{(移流・拡散)}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{(連続の式)}$$

未知変数 $\mathbf{u}$: 速度ベクトル　p : 圧力　$\mathbf{f}$: 外力

ρ : 密度　υ : 動粘性係数

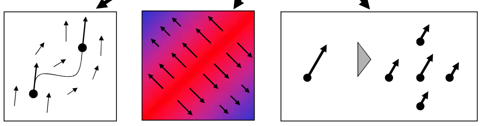
$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

NS方程式の意味

- 移流-拡散の式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \boxed{-(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}} - \boxed{\frac{1}{\rho}\nabla p} + \boxed{\upsilon\nabla^2\mathbf{u}} + \boxed{\mathbf{f}}$$

外力

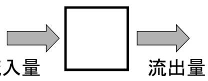


移流項　圧力項　拡散項

NS方程式の意味

- 連続の式

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

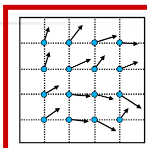


流入量　流出量

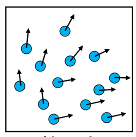
流入量　=　流出量

NS方程式の解法

- 格子を用いた方法
  - 解析空間を格子に分割
  - 差分法により解析
- 粒子を用いた方法
  - 流体を粒子の集合で表現
  - 粒子を用いて離散化



格子法

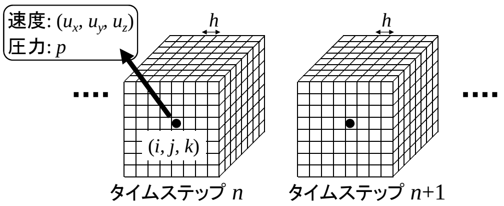


粒子法

NS方程式の解法

- 差分法による近似解法

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \upsilon\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f} \qquad \nabla\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0}$$



NS方程式の解法

- 差分法による近似解法

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} \boxed{- \frac{1}{\rho}\nabla p} + \upsilon\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_x(x,y,z,t)}{\partial t} \approx \dfrac{\boxed{u_x(i,j,k,n+1)} - u_x(i,j,k,n)}{\Delta t} \\ \dfrac{\partial u_x(x,y,z,t)}{\partial x} \approx \dfrac{u_x(i+1,j,k,n) - u_x(i-1,j,k,n)}{2h} \\ \dfrac{\partial^2 u_x(x,y,z,t)}{\partial x^2} \approx \dfrac{u_x(i+1,j,k,n) - 2u_x(i,j,k,n) + u_x(i-1,j,k,n)}{h^2} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{\mathbf{u}} \approx \mathbf{u}^n + \Delta t(-(\mathbf{u}^n\cdot\nabla)\mathbf{u}^n + \upsilon\nabla^2\mathbf{u}^n + \mathbf{f})$$

NS方程式の解法

- 差分法による近似解法

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} \boxed{- \frac{1}{\rho}\nabla p} + \upsilon\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_x(x,y,z,t)}{\partial t} \approx \dfrac{u_x(i,j,k,n+1) - u_x(i,j,k,n)}{\Delta t} \\ \dfrac{\partial u_x(x,y,z,t)}{\partial x} \approx \dfrac{u_x(i+1,j,k,n) - u_x(i-1,j,k,n)}{2h} \\ \dfrac{\partial^2 u_x(x,y,z,t)}{\partial x^2} \approx \dfrac{u_x(i+1,j,k,n) - 2u_x(i,j,k,n) + u_x(i-1,j,k,n)}{h^2} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{\mathbf{u}} \approx \mathbf{u}^n + \Delta t(-(\mathbf{u}^n\cdot\nabla)\mathbf{u}^n + \upsilon\nabla^2\mathbf{u}^n + \mathbf{f})$$

NS方程式の解法

- 差分法による近似解法

(連続の式)
$\nabla\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \tilde{\mathbf{u}} - \frac{\Delta t}{\rho}\nabla p \quad \cdots\cdot(*)$$

未知変数

・両辺の発散($\nabla\cdot$)
・連続の式の利用

$$\mathbf{0} \ = \nabla\cdot(\tilde{\mathbf{u}} - \frac{\Delta t}{\rho}\nabla p)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\Delta t}{\rho}\nabla^2 p = \nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}$$

・pについて解き、(＊)に代入して$\mathbf{u}^{(n+1)}$を得る
・反復解法が用いられる

NS方程式の解法

- 初期条件
  - 速度場:全て0か乱数を用いて決定
  - 圧力場:0
- 境界条件
  - 固定境界条件:境界での値を与える
  - 周期境界条件:解析空間が無限に繰り返される
  - 自然境界条件:境界法線方向の微分値が0

NS方程式の解法

- 安定性の問題
  - 拡散項 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \upsilon\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\upsilon\Delta t}{h^2} < \frac{1}{2}}$
  - 移流項 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \upsilon\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta t|\mathbf{u}| < h}$
- タイムステップを短くとらねばならない
- 無条件で安定な手法[Stam99]
  - 精度は落ちるが、CGには十分

NS方程式の安定な解法

- 4つのステップに分割して計算

$\mathbf{u}_{old}$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \upsilon\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}$$

NS方程式の安定な解法

- 4つのステップに分割して計算

$\mathbf{u}_{old}$ → 外力 → $\mathbf{u}_1$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \upsilon\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}$$

$\mathbf{u}_1$: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f}$ → 差分法

NS方程式の安定な解法

- 4つのステップに分割して計算

$\mathbf{u}_{old}$ → 外力 → $\mathbf{u}_1$ → 拡散 → $\mathbf{u}_2$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \upsilon\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}$$

$\mathbf{u}_1$: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f}$ → 差分法

$\mathbf{u}_2$: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \upsilon\nabla^2\mathbf{u}$ → 陰解法

NS方程式の安定な解法

- 4つのステップに分割して計算

$\mathbf{u}_{old}$ → 外力 → $\mathbf{u}_1$ → 拡散 → $\mathbf{u}_2$ → 移流 → $\mathbf{u}_3$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \upsilon\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}$$

$\mathbf{u}_1$: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f}$ → 差分法

$\mathbf{u}_2$: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \upsilon\nabla^2\mathbf{u}$ → 陰解法

$\mathbf{u}_3$: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ → セミラグランジュ法

NS方程式の安定な解法

- 4つのステップに分割して計算

$\mathbf{u}_{old}$ → 外力 → $\mathbf{u}_1$ → 拡散 → $\mathbf{u}_2$ → 移流 → $\mathbf{u}_3$ → 圧力項+連続の式 → $\mathbf{u}_{new}$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \upsilon\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}$$

$\mathbf{u}_1$: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f}$ → 差分法

$\mathbf{u}_2$: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \upsilon\nabla^2\mathbf{u}$ → 陰解法

$\mathbf{u}_3$: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ → セミラグランジュ法

$\mathbf{u}_{new}$: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$, $\nabla\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0}$ → 繰り返し計算 $\left(\frac{\Delta t}{\rho}\nabla^2 p = \nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}\right)$

拡散項の安定化

- 陽解法: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \upsilon\boxed{\nabla^2\mathbf{u}}$ ステップnの値を使用

$$\underbrace{u_x(i,j,n+1)}_{\text{未知変数}} = u_x(i,j,n) + \upsilon\frac{\Delta t}{h^2}\{u_x(i+1,j,n) + u_x(i-1,j,n) + u_x(i,j+1,n) + u_x(i,j-1,n) - 4u_x(i,j,n)\}$$

拡散項の安定化

- 陽解法: $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \upsilon \boxed{\nabla^2 \mathbf{u}}$ ステップnの値を使用

$$\underbrace{u_x(i,j,n+1)}_{\text{未知変数}} = u_x(i,j,n) + \upsilon \frac{\Delta t}{h^2}\{u_x(i+1,j,n) + u_x(i-1,j,n) + u_x(i,j+1,n) + u_x(i,j-1,n) - 4u_x(i,j,n)\}$$

- 陰解法 $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \upsilon \boxed{\nabla^2 \mathbf{u}}$ ステップ$n+1$の値を使用

$$\underline{u_x(i,j,n+1)} = u_x(i,j,n) + \upsilon \frac{\Delta t}{h^2}\{\underline{u_x(i+1,j,n+1)} + \underline{u_x(i-1,j,n+1)} + \underline{u_x(i,j+1,n+1)} + \underline{u_x(i,j-1,n+1)} - \underline{4u_x(i,j,n+1)}\}$$

未知変数

拡散項の安定化

- 陽解法
  - タイムステップnのとき支配方程式が成り立つと考える.
  - 変化が急になる方向に誤差が蓄積（無限大に発散）
- 陰解法
  - タイムステップn+1のとき支配方程式が成り立つと考える.
  - 変化が緩やかになる方向に誤差が蓄積（0に収束）
- 誤差の大きさはいずれも同じ

NS方程式の安定な解法

- 4つのステップに分割して計算

$\mathbf{u}_{old}$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \upsilon\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}$$

外力 $\to \mathbf{u}_1$: $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f}$ → 差分法

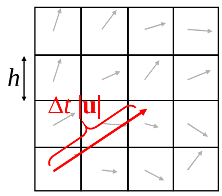
拡散 $\to \mathbf{u}_2$: $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \upsilon\nabla^2\mathbf{u}$ → 陰解法

移流 $\to \mathbf{u}_3$: $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ → セミラグランジュ法

圧力項+連続の式 $\to \mathbf{u}_{new}$: $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p$, $\nabla\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0}$ → 繰り返し計算 $\left(\dfrac{\Delta t}{\rho}\nabla^2 p = \nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}\right)$

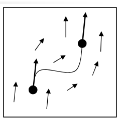
移流項の安定化

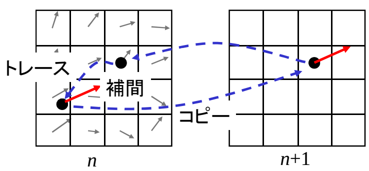
- 差分法による場合 $\boxed{\Delta t|\mathbf{u}| < h}$



移流項の安定化

- セミ・ラグランジュ法
  - 仮想粒子を配置
  - 速度場を逆にトレースして補間





密度場とのカップリング

- 密度の時間発展

拡散項（陰解法）

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)q + \kappa\nabla^2 q + S$$

移流項（セミ・ラグランジュ法）

q：煙の密度
$\mathbf{u}$：速度場(NS方程式より計算)
κ：拡散係数
S：煙の発生源の密度

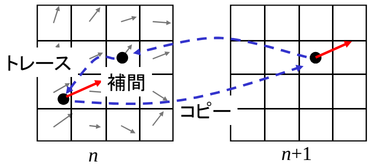
計算例(2D)

- demo

http://www.dgp.toronto.edu/people/stam/reality/Research/pub.html

移流項の計算誤差の問題

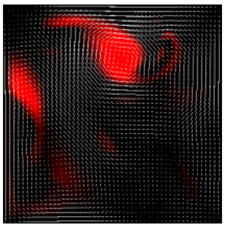
- セミ・ラグランジュ法
  - 補間処理により，詳細が失われる



Vorticity Confinement

- 消失した渦を補正する外力を加える方法

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}$$

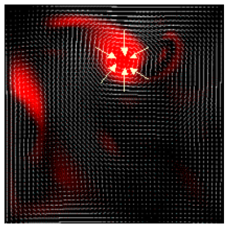


Vorticity Confinement

- 消失した渦を補正する外力を加える方法

$$\mathbf{N} = \frac{\eta}{|\eta|}$$

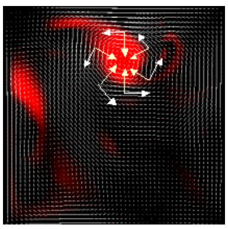
$$\eta = \nabla|\omega|$$



Vorticity Confinement

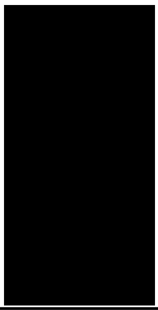
- 消失した渦を補正する外力を加える方法

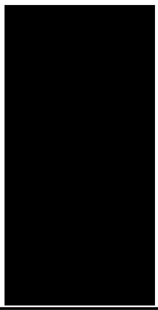
$$\mathbf{f} = \varepsilon h (\mathbf{N} \times \omega)$$



Vorticity Confinement

- 比較





BFECC法
(Back and Forth Error Correction and Compensation)

- セミ・ラグランジュ処理の誤差を見積もる

$$\phi^{n+1} = L(\mathbf{u}, \phi^n)$$

速度場

移流させる場

セミ・ラグランジュ
演算子

BFECC法
(Back and Forth Error Correction and Compensation)

- セミ・ラグランジュ処理の誤差を見積もる

$$\bar{\phi} = L(-\mathbf{u}, L(\mathbf{u}, \phi^n))$$

BFECC法
(Back and Forth Error Correction and Compensation)

- セミ・ラグランジュ処理の誤差を見積もる

$$\bar{\phi} = L(-\mathbf{u}, L(\mathbf{u}, \phi^n)) = \phi^n + 2e$$

$$e = (\bar{\phi} - \phi^n)/2$$

$$\phi^{n+1} = L(\mathbf{u}, \phi^n)$$

BFECC法
(Back and Forth Error Correction and Compensation)

- セミ・ラグランジュ処理の誤差を見積もる

$$\bar{\phi} = L(-\mathbf{u}, L(\mathbf{u}, \phi^n)) = \phi^n + 2e$$

$$e = (\bar{\phi} - \phi^n)/2$$

$$\phi^{n+1} = L(\mathbf{u}, \phi^n - e)$$

$$\phi^{n+1} = L(\mathbf{u}, \phi^n + \frac{1}{2}(\phi^n - \bar{\phi}))$$

BFECC法
(Back and Forth Error Correction and Compensation)

- 動画

内容

- 非圧縮性流体解析の基礎
- 応用例

応用1：煙

[Fost97]

- 熱源による浮力の発生
- 熱の移流・拡散

$$\mathbf{f}_{bv} = -\beta \mathbf{g}_v (T_0 - T_k)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\lambda \nabla^2 T}_{拡散} - \underbrace{\nabla \cdot T\mathbf{u}}_{移流}$$

応用2：炎

- 燃焼物と温度の時間変化を計算

燃焼物： $\frac{\partial Y}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) Y - k$

温度： $\frac{\partial T}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) T - c_T \left(\frac{T - T_{air}}{T_{\max} - T_{air}} \right)^4$

応用2：炎

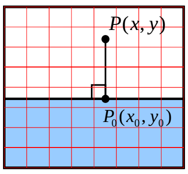
応用2:炎

[Nguy02]

- 動画

応用3：水

- レベルセット法による水面の追跡



$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\phi = 0$$

$\mathbf{u}$：速度

レベルセット関数φを
全計算領域に定義

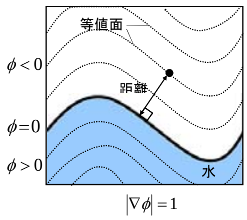
$$\phi(x, y) = \pm \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$\phi(x, y) \begin{cases} < 0 & (気相) \\ = 0 & (界面) \\ > 0 & (液相) \end{cases}$$

移流方程式により水面を追跡

応用3：水

- 再初期化処理



$$\frac{\partial \phi}{\partial t'} = \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0{}^2 + \varepsilon^2}} (1 - |\nabla \phi_k|)$$

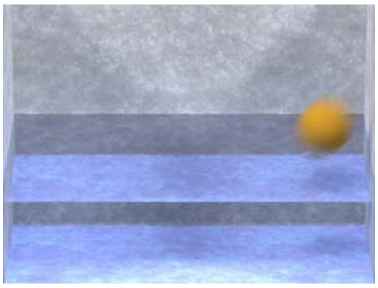
ϕ_0: 再初期化前のレベルセット関数
ϕ_k: タイムステップkのレベルセット関数
ε ：境界面の幅（格子間隔幅）

勾配 $|\nabla \phi|$が1から外れた値に対し、
それに比例した量をϕ に加える

応用2:水／炎

[Enri02]

- 例

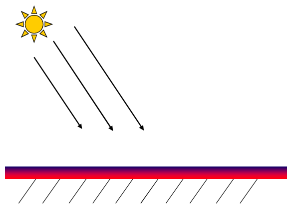


応用3:雲の形成

- 必要な物理量
  - 速度，水蒸気量，水滴量(雲の量)，大気の温度
- 水蒸気と水滴との間の相転移
  - 雲の発生と消滅に直接影響
  - 上方への雲の成長にも関与

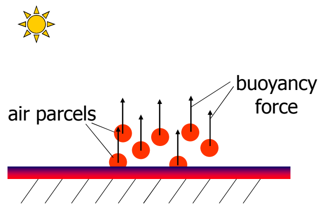
応用3:雲の形成

太陽による地面の加熱



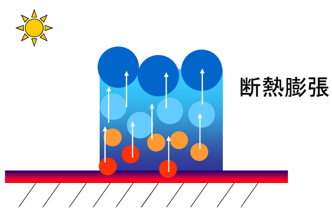
応用3:雲の形成

空気塊の上昇



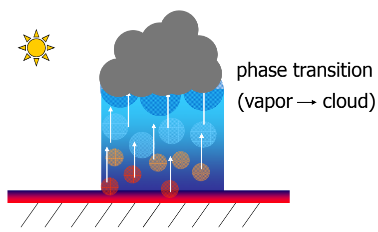
応用3:雲の形成

上昇にともなう温度の減少

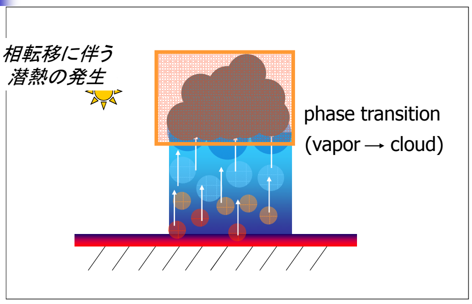


応用3:雲の形成

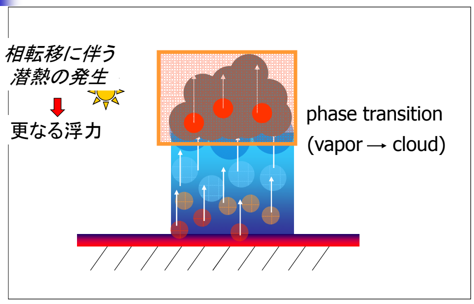
相転移による雲の発生



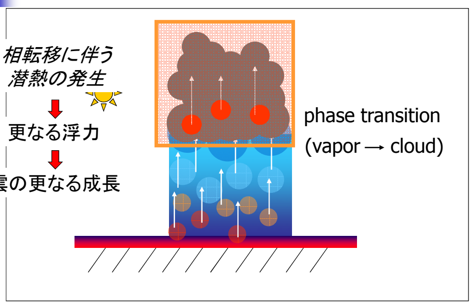
応用3：雲の形成



応用3：雲の形成



応用3：雲の形成



雲の形成シミュレーション

- 大気の速度
  - NS方程式＋浮力
- 大気の温度
  - 断熱膨張による温度減少，潜熱，地面
- 水蒸気と水滴
  - 水蒸気と水滴の間の相転移

大気の速度

- 非圧縮性ナビエ・ストークス方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{f} \boxed{+\mathbf{B}}$$

(浮力)

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{u}$: velocity　$\mathbf{f}$: external force　p : pressure　t : time

浮力と温度

- 熱浮力

$$\mathbf{B} = k_b \frac{T - T_0}{T_0}\mathbf{z}$$

T：温度　T_0：環境温度

$\mathbf{z}$：鉛直上向きベクトル　k_b：浮力係数

- 温度

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \boxed{-(\mathbf{u}\cdot\nabla)T}\boxed{-\Gamma_d v_z}\boxed{+QC_c}\boxed{+S_T}$$

Q：潜熱係数　C_C：雲の発生量

Γ_d：乾燥断熱減率　v_z：速度の鉛直成分

S_T：地面からの熱

水蒸気と水滴

- 相転移

$$\text{水滴:}\quad \frac{\partial q_c}{\partial t} = \boxed{-(\mathbf{u}\cdot\nabla)q_c}\,\boxed{+C_c} \qquad C_c = \alpha(q_v - q_s)$$

$$\text{水蒸気:}\quad \frac{\partial q_v}{\partial t} = \boxed{-(\mathbf{u}\cdot\nabla)q_v}\,\boxed{-C_c}$$

q_c : 雲密度　　q_v : 水蒸気密度

C_c : 相転移によって発生する雲の量

数値シミュレーション

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{f} + \mathbf{B} \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{B} = k_b \dfrac{T - T_0}{T_0}\mathbf{z} \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)T - \Gamma_d v_z + QC_c + S_T \\ \dfrac{\partial q_c}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)q_c + C_c \\ \dfrac{\partial q_v}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)q_v - C_c \end{cases}$$

大気の速度

大気の温度

水蒸気と水滴

計算例

- 積雲

格子数 : 150 × 120 × 50

計算時間: 4 sec./step

computer : Pentium III 1.2GHz

計算例

- 積乱雲

格子数 : 150 × 120 × 100

計算時間: 8 sec./step

computer: Pentium III 1.2GHz

計算例

VIDEO