BNP PARIBAS

数理ファイナンス入門　理論と実務

筬島　靖文
BNPパリバ証券　クオンツリサーチ部

2009年2月24日
京都大学　グローバルCOE講演会

Corporate
and Investment
Banking

Disclaimer

- 本講演の内容は、私個人の意見でありBNPパリバ証券の意見を述べるものではありません。

BNP PARIBAS

Corporate
and Investment
Banking

賭けのビジネスモデル

■1回の賭けでコインを投げて表が出れば100円の儲け、裏が出れば100円の損。

■ただし、1回の賭けで、1円の手数料をもらうことができるとする。

■当然、1回の賭けではリスク（損益の標準偏差）が大きすぎ、ビジネスとしては成立しない。

■N回の賭けを行った場合には損益の標準偏差は、

$$\sqrt{N \times (\frac{1}{2} \times 100^2 + \frac{1}{2} \times (-100)^2)} = 100\sqrt{N}$$

で与えられる。

■一方、手数料は $1 \times N$ 円

■すなわち、N～1万回以上のオーダーで行えば、リスクに見合った手数料が得られる。

■ポイントは、賭けの回数をできるだけ増やすこと。

Corporate and Investment Banking

デリバティブ取引とは

- デリバティブは日本語では「金融派生商品」と呼ばれ、ある原資産から「派生した」金融商品。
- 原資産とは、株式、為替、金利、債券、原油等々、市場で取引される基本的な商品のことである。
- デリバティブのキャッシュフローは、原資産の将来の価格変動に応じて決まる。

Corporate
and Investment
Banking

デリバティブ取引の例(1)　フォワード取引

■あらかじめ定められた満期Tにおいて、契約時に定められた価格Fで、原資産を買う、もしくは売る取引。

■先渡し取引とも言う。

■時点tにおける原資産の価格 $S(t)$ と書くと、満期Tにおけるペイオフ関数（キャッシュフロー）は、

$$V(T)=\begin{cases} S(T)-F & (\text{原資産を買う場合}) \\ F-S(T) & (\text{原資産を売る場合}) \end{cases}$$

■例えば、海外から仕入れた商品の支払いが3ヵ月後に米ドルで行われるとし、10万米ドルを払わなければいけないとする。

■もしも、もうこれ以上円高に行く可能性が低いと判断した場合、現時点で3ヵ月後のドル円の交換レートを今決めた方がよい。

■このときにフォワード取引を使える。

デリバティブ取引の例(2) オプション取引

■満期Tにおいて、契約時に定められた価格K（ストライクと呼ぶ）で原資産を買う、もしくは売る権利。それぞれ、コールオプション、プットオプションと呼ぶ。

$$V(T)=\begin{cases}(S(T)-K)^{+} & (\text{コールオプション})\\ (K-S(T))^{+} & (\text{プットオプション})\end{cases}$$

■例えば、多くの日本のメーカーは、円高になることを避けたい。例えば、高級車一台をアメリカで10万ドルで売ったとしても、円高になると収益が落ちてしまう。

■円高リスクをヘッジするために、例えば満期1年ストライク80円のプットオプションを購入する。

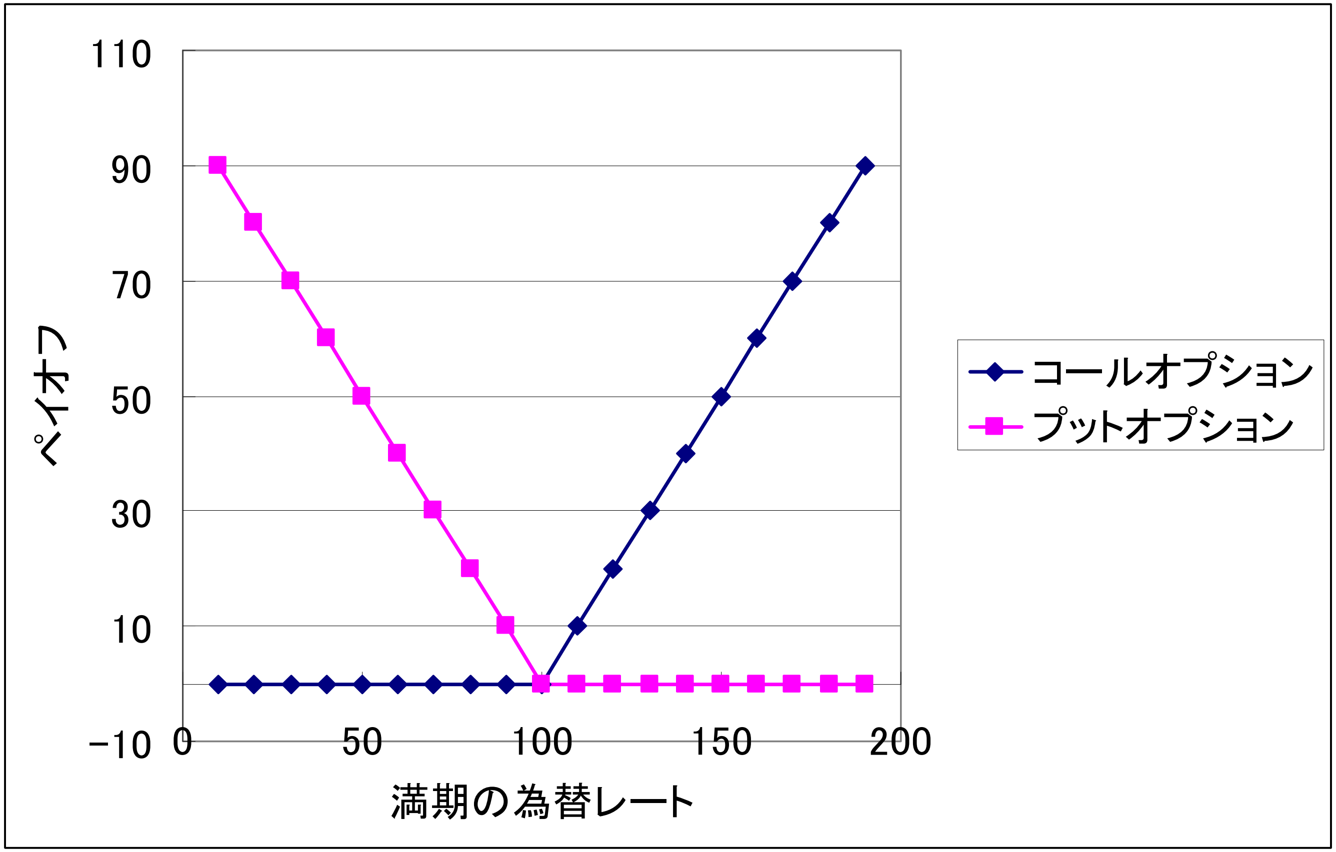
■1年後、ドル円レートが60円に下落した場合、車一台の売上げが60円x10万ドル＝600万円になるところを、プットオプションを権利行使することにより、80円x10万ドル=800万円で売ることができる。

■では、金融機関は、このプットオプションをいくらでメーカーに売ればよいか？

Corporate
and Investment
Banking

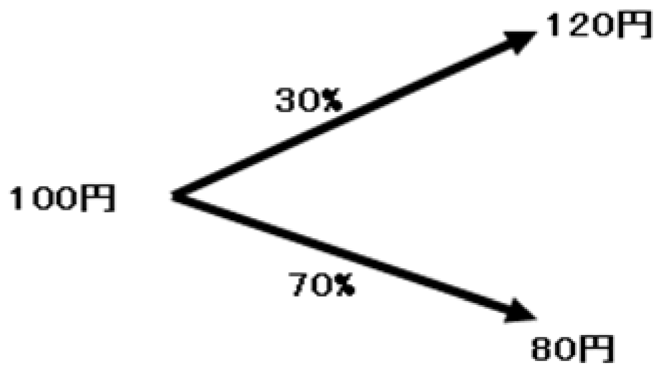
オプション取引のペイオフ関数

■ ストライク100円の為替のコールオプションの場合



2項モデル

- 以下の単純なモデルのもとで、コールオプションの価格を計算してみよう。
- A社の株価が現在100円。
- 1年後に70%の確率で80円、30%の確率で120円になるとする。

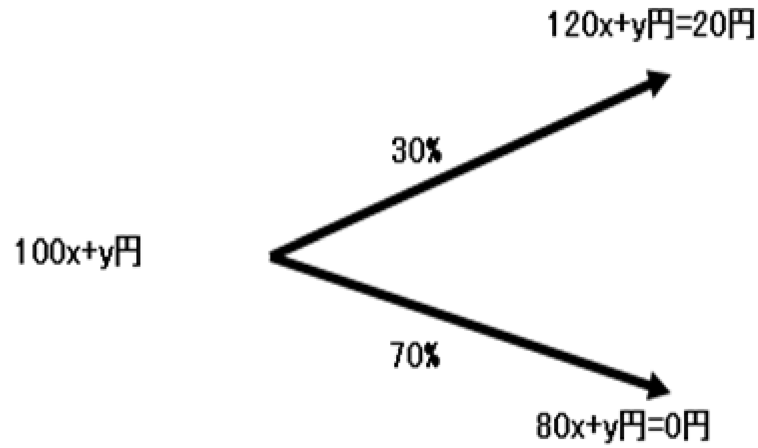


- 株価が1年後に120円になったら値上がり分の20円もらえ、80円だと何ももらえない金融商品があったら、その価格はいくらか？
- この金融商品は「ストライク100円のコールオプション」で、価格をオプションプレミアムと言う。
- 先の賭けのビジネスモデルで考えると、20円X30%＋0円X70%=6円。
- しかし、それは間違い。

Corporate
and Investment
Banking

複製戦略

- A社の株式が市場で売買可能であるのがポイント。
- A社の株式x単位と現金y円で、1年後のキャッシュフローを複製してみよう。



- これを解くと、x = 0.5 y = -40
- よって時点0での価格は、100x0.5-40=10円となる。
- もともとの確率など関係なくオプションプレミアムは決定された。

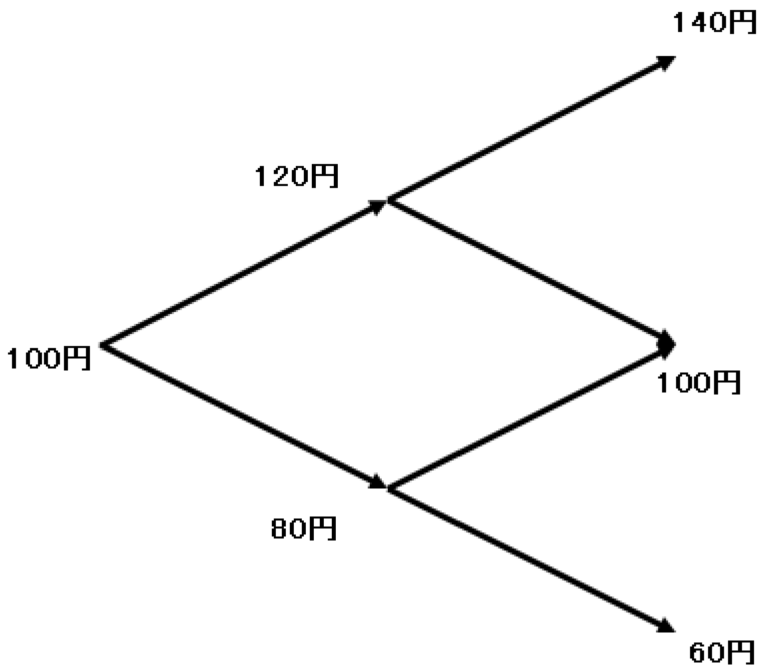
デリバティブのビジネスモデル

- 金融機関は、この例のコールオプションを顧客に手数料1円を取って11円で売ったとしよう。
- 金融機関が何もしなければ、1年後に30%の確率で20円を払わなければならず、賭けのビジネスモデルと同じになる。
- 時点0において、金融機関は、オプションプレミアム10円と銀行から40円借りて（金融機関なら市場から調達）、A社の株式を0.5単位購入。
- 1年後、A株式が120円に値上がりしたら、0.5単位を売却して60円を得て、40円を銀行に返済し残りの20円を顧客に支払う。
- 逆に、80円に値下がりしたら、0.5単位を売却して40円を得て、その40円を銀行に返済し、顧客に支払う必要はないからこれで終了。
- 以上により、1円の手数料を、「確実に」利益として得ることができるので、賭けのビジネスモデルとは異なる。
- ただし、モデル（この場合、1年後の株価が120円または80円になるという仮定）が間違っていれば、利益を確実に得ることはできず、モデルがどれだけマーケットに合っているかがポイントになる。

Corporate
and Investment
Banking

2期間モデル

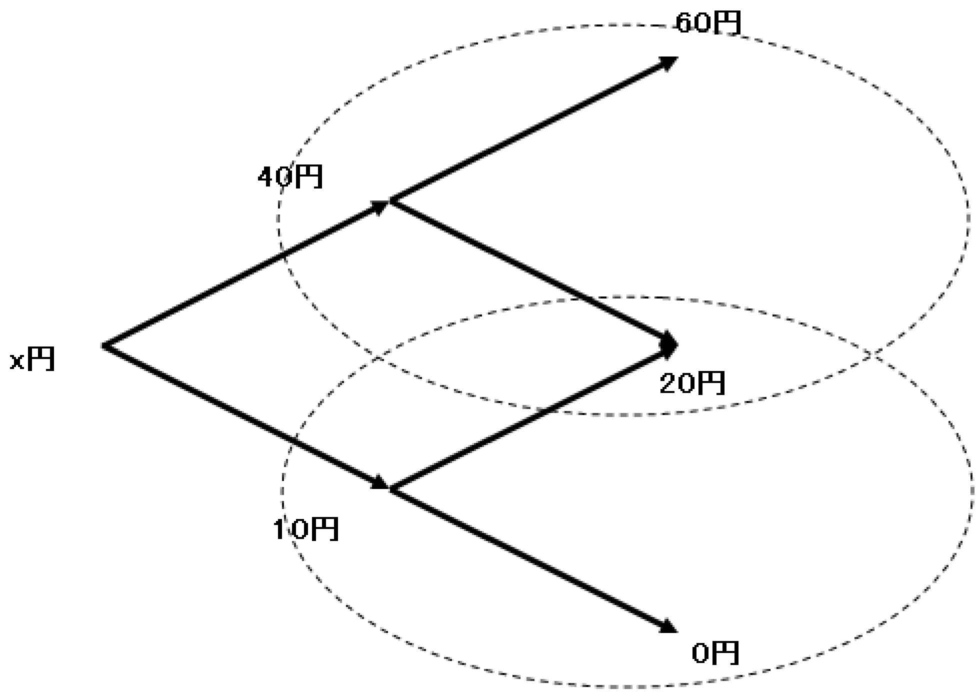
- もう少し複雑に2期間の2項モデルを考えて、ストライク80円のコールオプションをプライシングしてみよう。



Corporate
and Investment
Banking

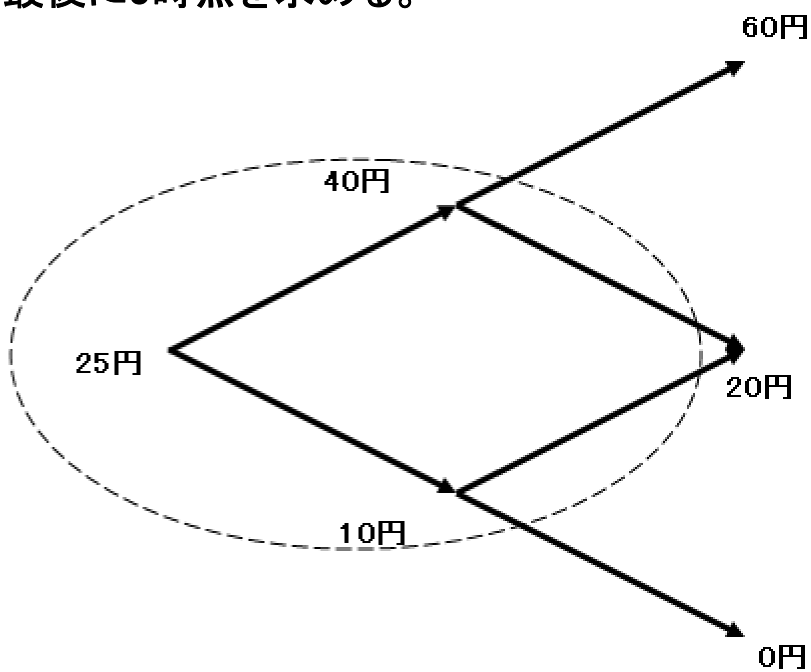
2期間モデルの解き方（1）

- オプション満期のキャッシュフローは確定しているから、後ろから、順に複数の1期間モデルを解いていけばよい。



2期間モデルの解き方(2)

- 最後に0時点を求める。

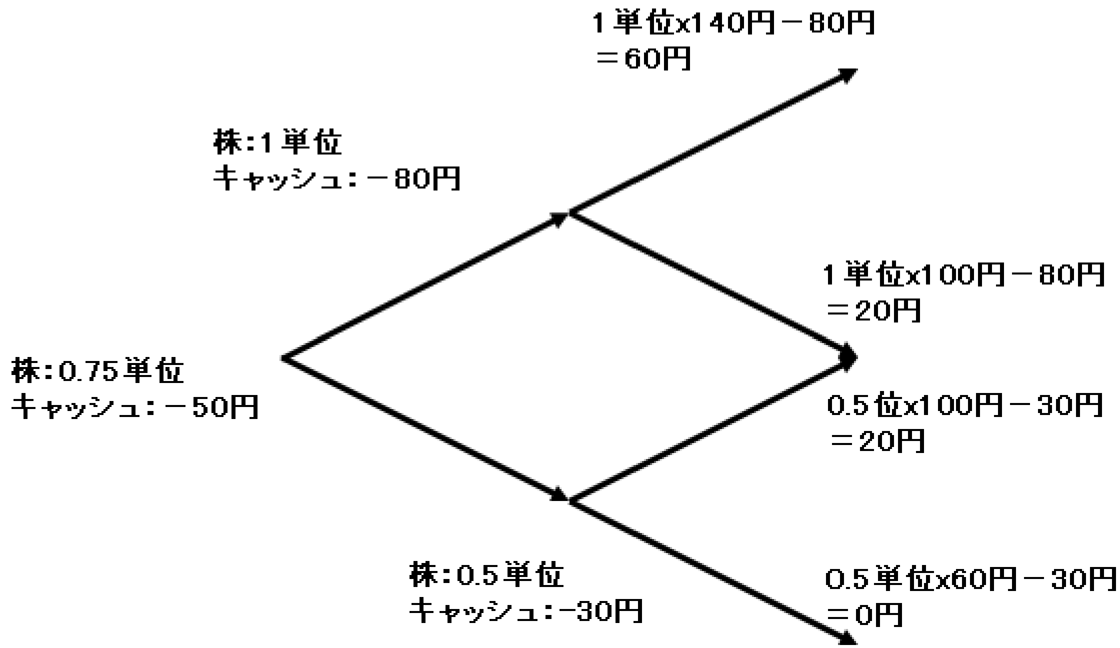


- 実は、各格子の値が分岐した2つの格子の値の平均になっていることがわかるが、これは偶然ではなく、「元の原資産価格がマルチンゲールになるような確率のもとで、コールオプション価格は期待値と表される」という性質による。

Corporate
and Investment
Banking

2期間の複製戦略

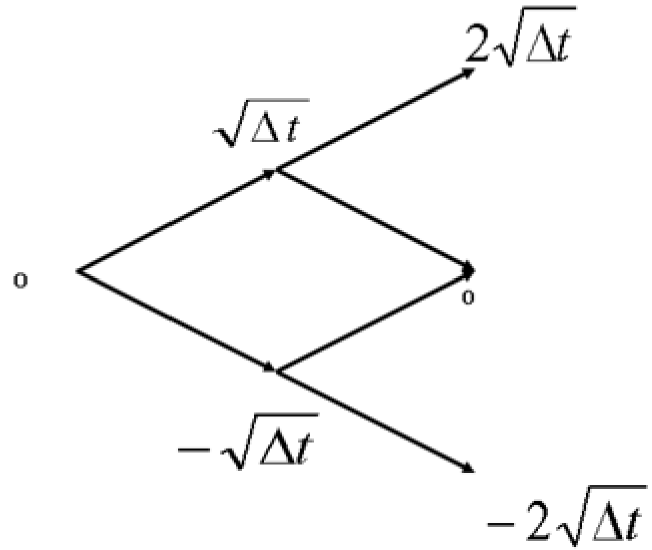
- 25円のオプション料と、50円を銀行から借り入れ、75円で株を0.75単位購入。
- 株が半年後120円に値上がりしたら、さらに30円を銀行から借り入れ、株を0.25株（120X0.25=30円）追加購入。



- このように、株価の変化に合わせてポートフォリオをダイナミックに変化させていくので、"ダイナミックヘッジ"という。
- もちろん、市場は時々刻々変化していくので、2期間モデルでも到底マーケットを表すことはできない。

ブラウン運動

■連続時間のモデルを考えるために、先の2項モデルの時間間隔を Δt とし、Δt 後に1/2の確率で上下に$\pm\sqrt{\Delta t}$ 動く確率過程を考えよう。



■数学的には、ブラウン運動 W_t は、（これだけでは足りないが）

（1）連続な確率過程

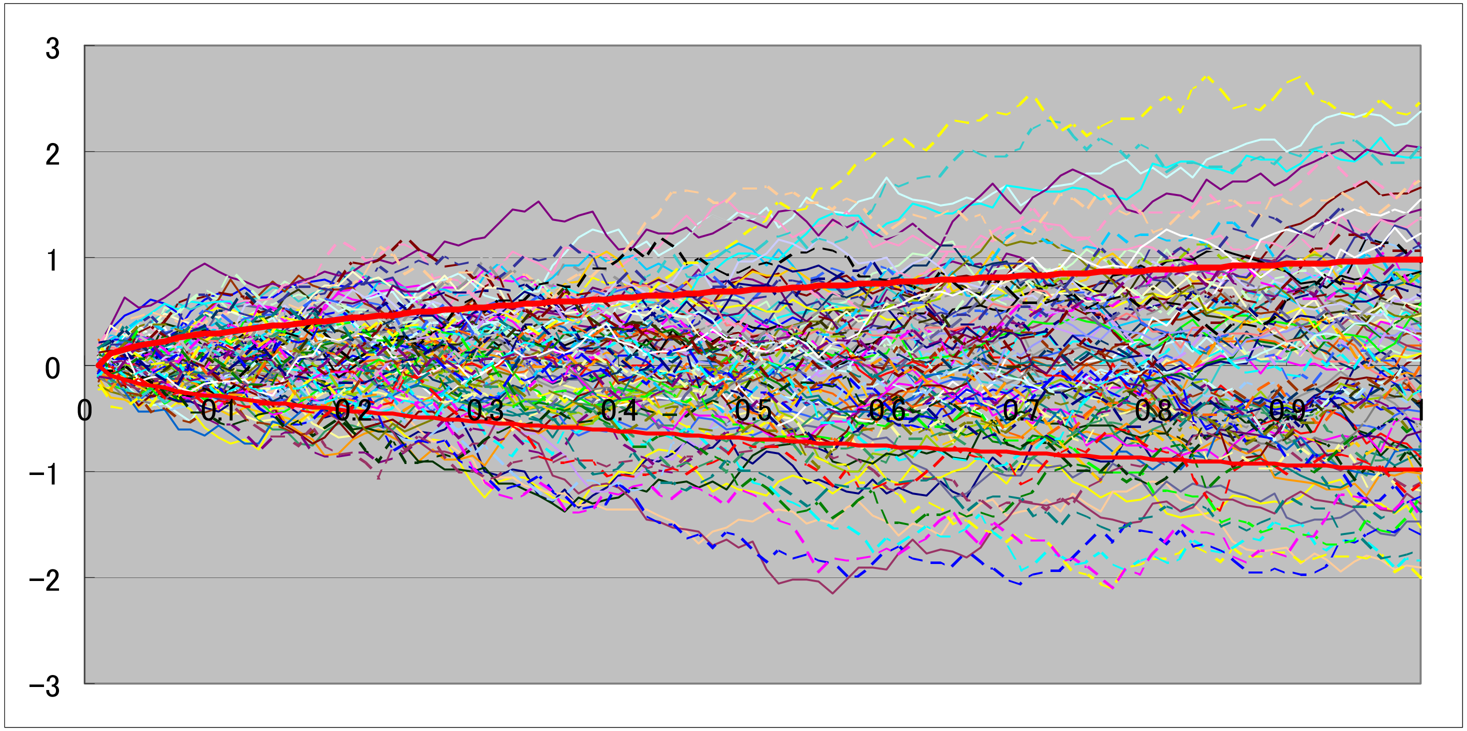
（2）$W_0 = 0$

（3）時点tの値 W_t の分布は正規分布$N(0,t)$に従う

（4）$W_{t+s} - W_s$ は W_s と独立で、分布は $N(0,t)$ に従う

ブラウン運動のサンプルパス

■ブラウン運動のサンプルパス(100本)は、以下のようになる。



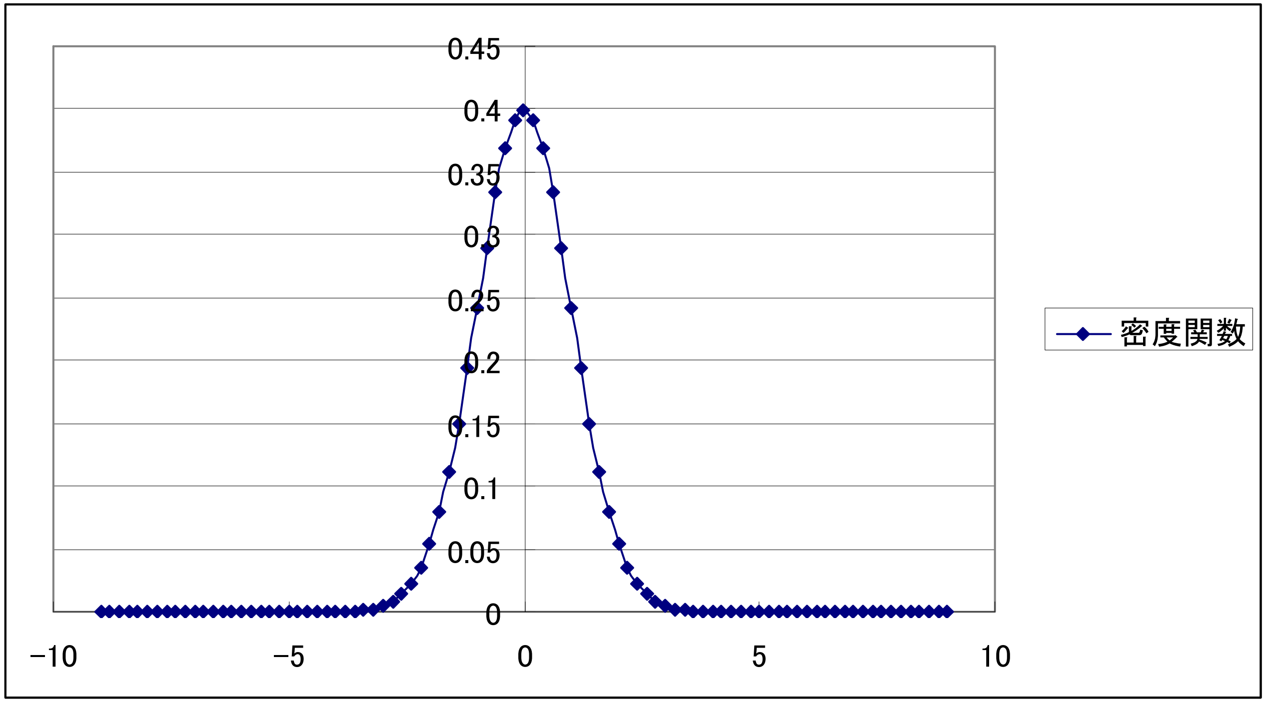
■赤線は、標準偏差$\pm\sqrt{t}$ の線を表す。

正規分布

■中心0、分散tの正規分布とは、密度関数が

$$\phi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t})$$

に従うような確率分布のこと。



Corporate
and Investment
Banking

確率微分方程式

■ほとんどの金融モデルは確率微分方程式を用いて記述される。

$$dX_t = \sigma(X_t, t)dW_t + \mu(X_t, t)dt$$

■直感的な意味としては、微少時間Δtの間の変分が、平均 $\mu(X_t, t)\Delta t$

分散 $\sigma(X_t, t)^2 \Delta t$ の正規分布となるような確率過程を表す。

$$X_{t+\Delta t} - X_t = \sigma(X_t, t)\Delta W_t + \mu(X_t, t)\Delta t$$

■例えば、

$$dX_t = \sigma dW_t + \mu dt$$

という確率微分方程式の解は

$$X_t = x_0 + \sigma W_t + \mu t$$

で与えられる。

Corporate
and Investment
Banking

伊藤の公式

■関数 $f \in C^{1,2}([0,\infty)\times R)$ に対して、確率過程 $X_t = f(t,W_t)$ とすると、以下の確率微分方程式を満たす。

$$dX_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,W_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,W_t)\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,W_t)dW_t$$

■例1

$$d(W_t^2) = 2W_t dW_t + dt$$

■例2

$$X_t = \exp(\sigma W_t + \mu t)$$

とすると伊藤微分は

$$dX_t = X_t(\sigma dW_t + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)dt)$$

で与えられる。

ブラックショールズモデル

■ ブラックショールズモデルとは、時点t の株価 $S(t)$が、以下の確率過程に従うとしたモデル。

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \sigma dW(t) + \mu dt$$

$$dB(t) = rB(t)dt$$

■ ここでσはボラティリティ（変動率）、μはドリフト、rは短期金利や無リスク金利と呼ばれる。$B(t)$ はマネーマーケットアカウント、銀行預金等と呼ばれる。

■伊藤の公式から、確率微分方程式を解くことができ、解は

$$S(t) = S_0 \exp(\sigma W(t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t)$$

で与えられる。

Corporate
and Investment
Banking

コールオプションのプライシング

■株価過程$S(t)$と銀行預金 $B(t)$が取引可能資産とする。

■コールオプションの時点tにおける価値は、株価 $S(t)$の関数 $C(t,S(t))$ として書けるとする。

■満期Tにおいては、

$$C(T,S(T))=(S(T)-K)^{+}$$

を満たす。

■伊藤の公式から、

$$dC(t,S(t))=\left(\frac{\partial C}{\partial t}+\mu S\frac{\partial C}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt+\sigma S\frac{\partial C}{\partial S}dW(t)$$

を満たす。

■ここで、dWの確率変動項を消すために、$-\frac{\partial C}{\partial S}$ 株の株式を保有するポートフォリオΠを考えると、時点tの価値は、

$$\Pi(t)=C(t,S(t))-\frac{\partial C}{\partial S}S(t)$$

で与えられる。

Corporate
and Investment
Banking

ブラックショールズの偏微分方程式

■このポートフォリオのΔt期間中のポートフォリオの変化を考えると

$$\Delta\Pi = \Delta C - \frac{\partial C}{\partial S}\Delta S = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)\Delta t$$

■確率変動項が存在しないため、ポートフォリオのリターンは無リスク金利rに等しくなければならない。

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t = r\left(C - \frac{\partial C}{\partial S}S\right)\Delta t$$

■以上を整理すると、ブラックショールズの偏微分方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

$$C(T,S) = (S-K)^+$$

が得られる。

BNP PARIBAS

Corporate and Investment Banking

ブラックショールズ式

■この方程式は解くことができて解は、

$$C(t,S(t)) = S(t)\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\log(S(t)/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

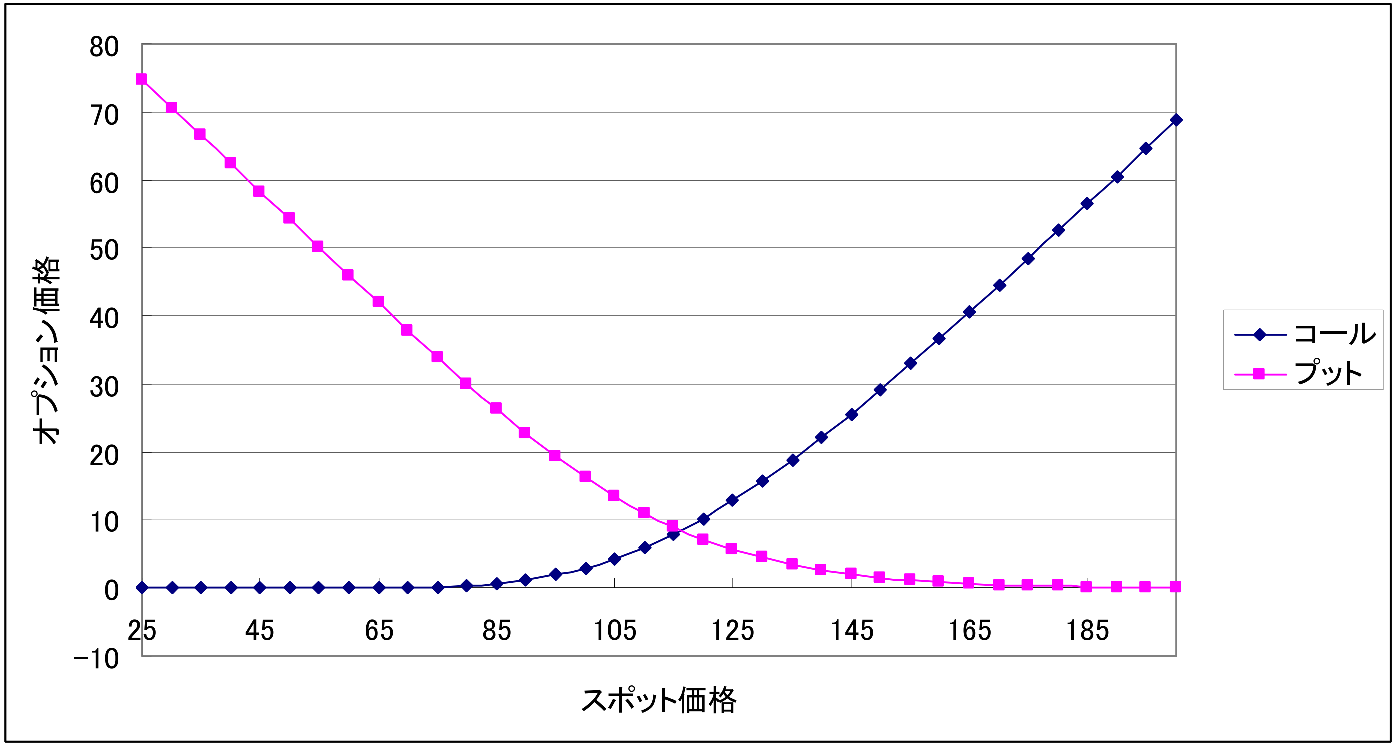
により与えられる。ただし、

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(z)dz, \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}x^2)$$

この解をブラックショールズ式と呼ぶ。

オプション価格の変化

- 株価の変化によるコールオプション、プットオプションの価値の変化は以下のように与えられる。



Corporate and Investment Banking

リスクヘッジ

- 例えば、顧客にコールオプションを売った場合、オプション満期までどうすればいいのだろうか？
- 最初に2項モデルで説明したように、コールオプションのペイオフを原資産の株を用いて複製戦略を組む。
- 複製戦略を組むためには、コールオプションのリスク指標を計算する必要がある。
- トレーダーはこのリスク指標を随時把握しながらリスクヘッジを行っている。
- このリスク指標を正確に求めることもクォンツの役割。

リスク指標

■デルタ:オプション価値の原資産価格に対する変化量

$$\frac{\partial C}{\partial S}$$

■ガンマ:デルタの原資産価格に対する変化量

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

■ベガ:オプション価値のボラティィリティに対する変化量

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma}$$

■セータ: オプション価値の時間に対する変化量

$$\frac{\partial C}{\partial t}$$

■その他にも、いろいろなリスク指標がある。

Volga:ボラティィリティについての2階微分 $\frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2}$

Vanna:ボラティィリティと原資産についての2階微分 $\frac{\partial^2 C}{\partial S \partial \sigma}$

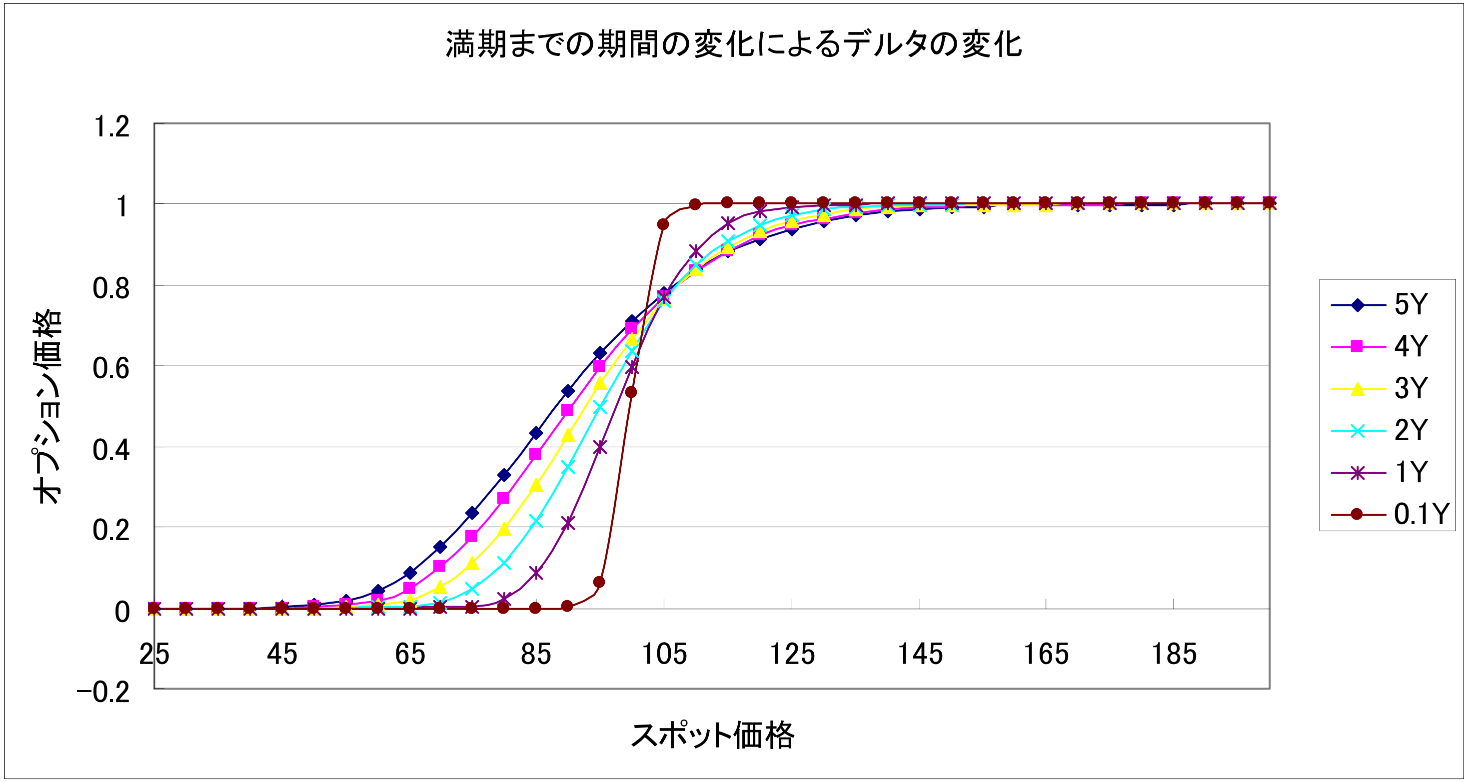
■これらの指標を安定的に算出することがリスクマネージメント上は重要である。

Corporate and Investment Banking

デルタ

■デルタは原資産価格に対して以下のように変化する。オプションがインザマネーの状態では、原資産と同様の動きをし、アウトオブザマネーになるほど、0に近づく。満期が近づくにつれて、ヘビサイド関数に収束する。

■デルタが１に近いと、コールオプションは原資産とほぼ同じ動きをする。



Corporate and Investment Banking

インプライドボラティリティ

- 多くの原資産で、コール・プットオプションは頻繁にマーケットで取引される。
- オプションの取引は、その価格ではなくインプライドボラティリティで行われる。
- 与えられた満期T、ストライクKのコールオプション価格 $C(T,K)$ に対して、ブラックショールズ式

$$C_{BS}(T,K,\sigma)=S_0\Phi(d_1)-Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$

$$d_1=\frac{\log(S_0/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T}}$$

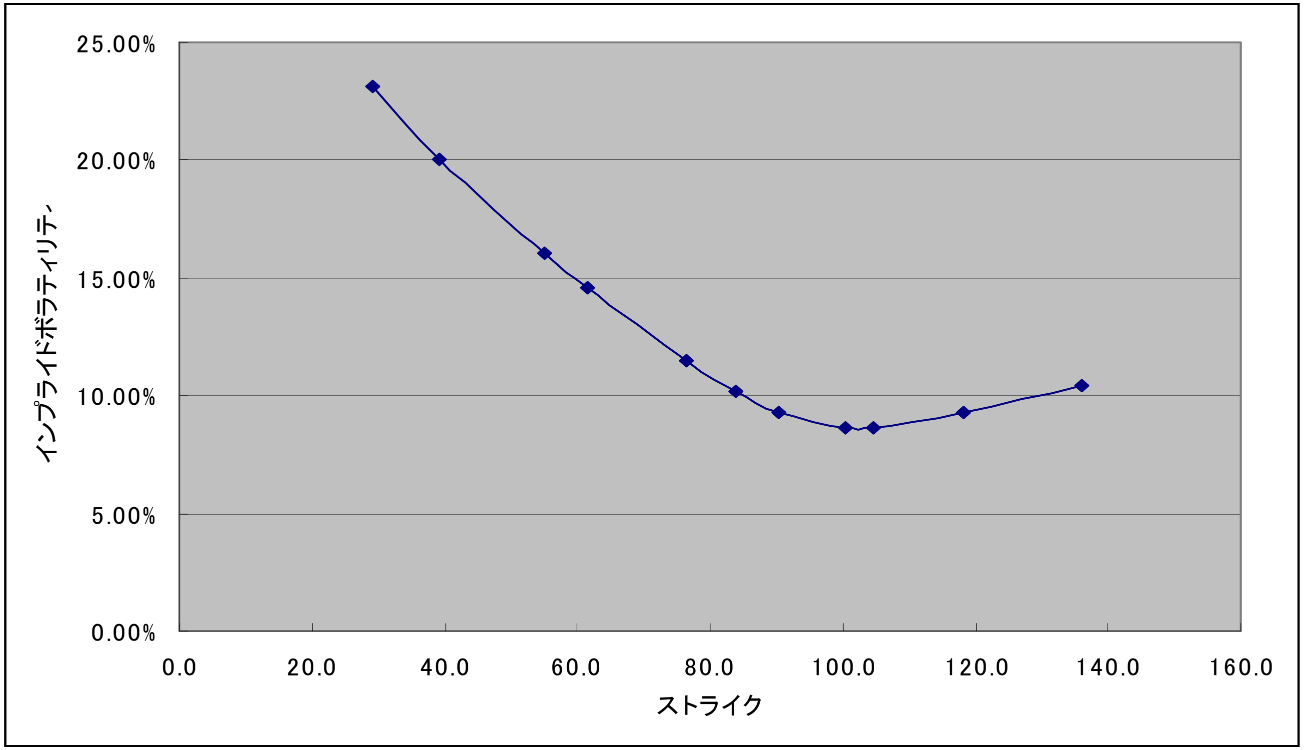
$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}$$

と書くとき、$C_{BS}(T,K,\sigma_{BS}(T,K))=C(T,K)$ を満たすボラティリティ $\sigma_{BS}(T,K)$ をインプライドボラティリティと言う。

Corporate and Investment Banking

ボラティリティスマイルの存在

- もしも、ブラックショールズモデルが正しいならば、インプライドボラティリティは当然、ストライクによらず一定値を取るはず。
- しかし、多くの市場でインプライドボラティリティは下のような形をしており“ボラティリティスマイル”と呼ばれる。
- これにキャリブレーションできるモデルを作ることが大きな問題のひとつである。



BNP PARIBAS

ローカルボラティリティモデル

■ボラティリティスマイルにキャリブレーションできるモデルとして最も有名なものがDupireのローカルボラティリティモデルである。ボラティリティが、時間と株価に関するノンパラメトリックな確定的な関数 $\sigma_{loc}(t,S)$ を与え、株価過程が以下の確率微分方程式に従うとする。

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t$$

■すべての満期、すべてのストライクについてコールオプション価格 $C(T,K)$ が与えられた場合ローカルボラティリティ関数は以下を満たす。

$$\sigma_{loc}^2(T,K) = \frac{\dfrac{\partial C}{\partial T} + rK\dfrac{\partial C}{\partial K}}{\dfrac{1}{2}K^2\dfrac{\partial^2 C}{\partial K^2}}$$

Corporate and Investment Banking

ローカルボラティリティの導出

■ここではr=0の場合に略証を与えよう。伊藤の定理を拡張した田中の公式から

$$(S_T - K)^+ = (S_0 - K)^+ + \int_0^T 1_{\{S_t > K\}} dS_t + \int_0^T \frac{1}{2} \delta_{\{S_t = K\}} S_t^2 \sigma_{loc}^2 (t, S_t) dt$$

が得られ、さらに、コールオプション価格 $C(T,K) = E\left[(S_T - K)^+\right]$ より

$$\frac{\partial}{\partial T} C(T,K) = \frac{1}{2} E\left[\delta_{\{S_T = K\}} S_T^2 \sigma_{loc}^2 (T, S_T)\right]$$

$$= \frac{1}{2} K^2 \sigma_{loc}^2 (T,K) E\left[\delta_{\{S_T = K\}}\right]$$

■コールオプション価格のストライクに関する2階微分から下記のように確率密度が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial K^2} C(T,K) = E\left[\delta_{\{S_T = K\}}\right]$$

■以上により

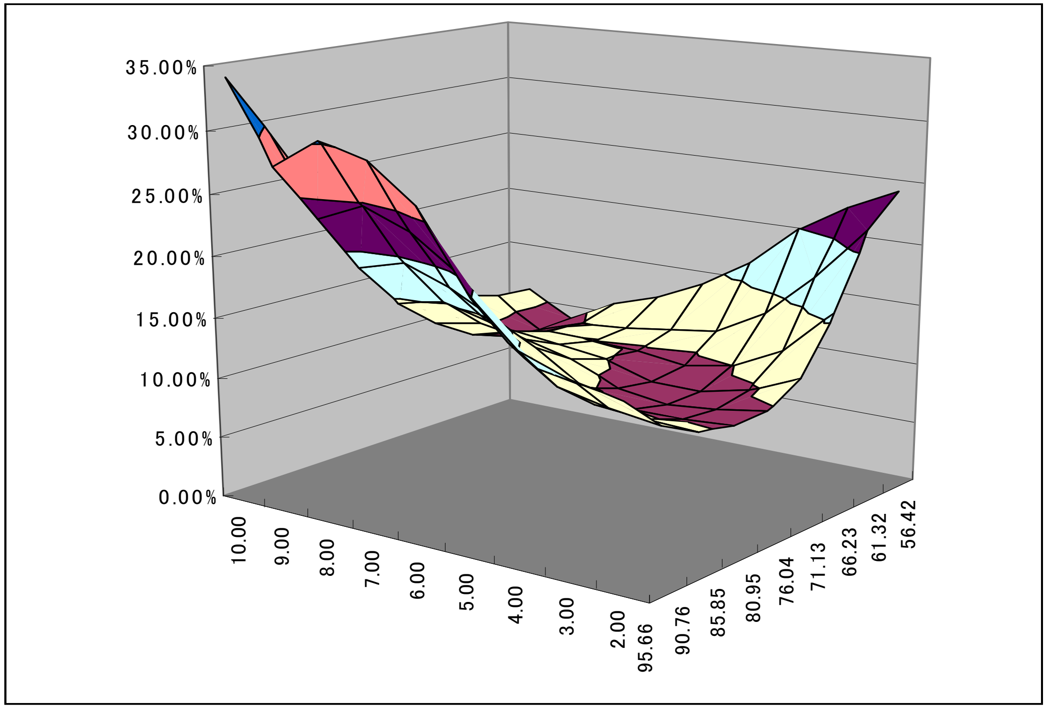
$$\frac{\partial}{\partial T} C(T,K) = \frac{1}{2} K^2 \sigma_{loc}^2 (T,K) \frac{\partial^2}{\partial K^2} C(T,K)$$

が得られる。

BNP PARIBAS

ローカルボラティリティ曲面

■ローカルボラティリティ曲面 $\sigma_{loc}(T,K)$ は以下のような形状をしている。



■このモデルは非常にいいモデルであるが、短所としては、コールオプション価格がすべての満期、ストライクについて与えられることはないので、その間の補間に依存する点や、フォワードスマイルが平坦になってしまう等のマーケットの動きとの違い等が挙げられる。

Corporate and Investment Banking

SABRモデルと 漸近展開

■ボラティリティスマイルを表現するモデルとして確率ボラティリティモデルがある。そのひとつがSABRモデル。C を確定的な関数として以下のモデルを考える。

$$dS_t = \alpha_t C(S_t)\,dW_1(t)$$
$$d\alpha_t = \nu \cdot \alpha_t\,dW_2(t)$$
$$d\langle W_1, W_2\rangle = \rho\,dt$$

■このモデルではコールオプションの価格を解析式で求めることができないため、インプライドボラティリティの漸近展開式が使われる。

$$\sigma_B(T,K) = \frac{\alpha \ln(S_0/K)}{\int_K^{S_0} \frac{dx}{C(x)}} \cdot \frac{\zeta}{x(\zeta)} \cdot$$

$$\left\{1 + \left[\frac{2\gamma_2 - \gamma_1^2 + 1/S_{av}^2}{24}\alpha^2 C^2(S_{av}) + \frac{1}{4}\rho\nu\alpha\gamma_1 C(S_{av}) + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right]\varepsilon^2 T + \ldots\right\}$$

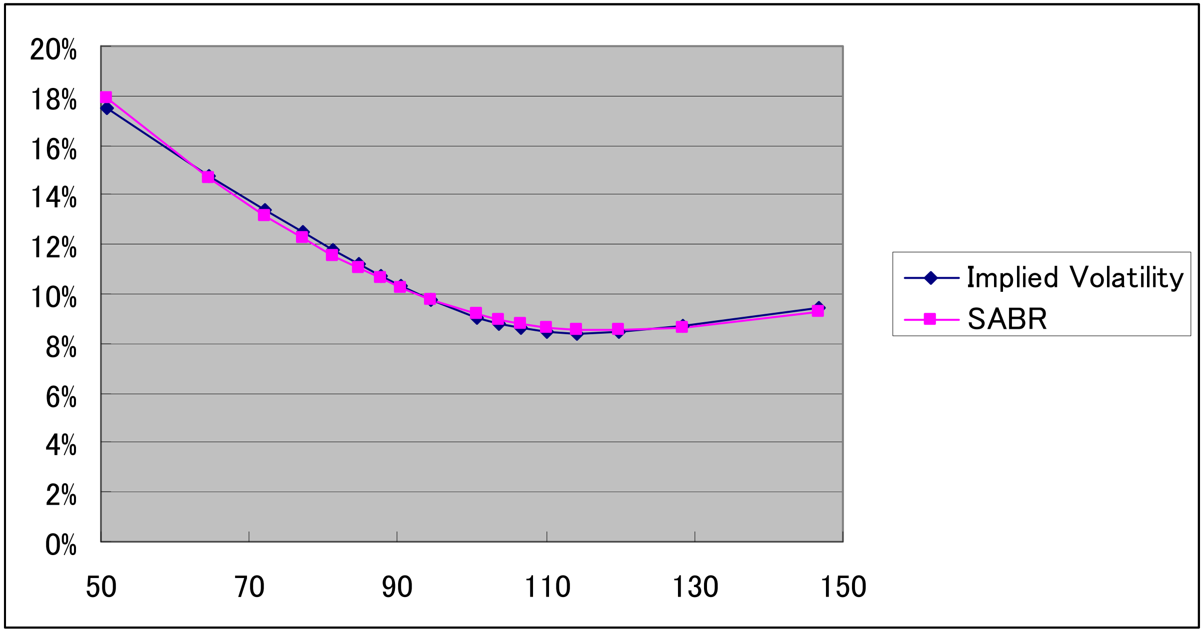
$$S_{av} = \sqrt{S_0 K},\ \gamma_1 = \frac{C'(S_{av})}{C(S_{av})},\ \gamma_2 = \frac{C''(S_{av})}{C(S_{av})},$$

$$\zeta = \frac{\nu}{\alpha}\frac{S_0 - K}{C(S_{av})},\quad x(\zeta) = \log\left(\frac{\sqrt{1-2\rho\zeta+\zeta^2} - \rho + \zeta}{1-\rho}\right)$$

Corporate and Investment Banking

SABRモデルの精度

■SABRの公式はオプション期間が短期の場合には非常に正確でかつ下のグラフに示すようにマーケットにもよく合うことから、市場参加者で使っている人も多い。



■このインプライドボラティリティの漸近展開は、リーマン多様体上の熱核展開、もしくは、Malliavin解析の漸近展開（渡辺、楠岡-Stroockの漸近展開）と非常に密接な関係がある。

Corporate and Investment Banking

大偏差原理

■SABRモデルのボラティリティを ε オーダーとし、εを0に近づけたときの極限を考えよう。

$$dS_t^\varepsilon = \varepsilon\alpha_t C(S_t)(\rho dW_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}dW_2(t))$$

$$d\alpha_t^\varepsilon = \varepsilon\nu\cdot\alpha_t dW_1(t)$$

■リーマン計量を以下で定義

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2C(x)^2 & \rho\nu y^2C(x) \\ \rho\nu y^2C(x) & \nu^2y^2 \end{pmatrix}$$

■確率密度関数を、 $p^\varepsilon(t;y) = E[\delta(S_t^\varepsilon - y)]$で定義すると、大偏差原理から以下が導かれる。

$$\lim \varepsilon^2 \log p^\varepsilon(t;y) = \frac{1}{2}\inf \int_0^T g_{ij}(t,z)\dot{z}_i\dot{z}_j dt$$

■SABRモデルに対しては、この右辺を求めることができ、それがSABRの公式の第一項になる。

■さらに、精度を上げるためには高次の項を求める必要がある。

■現在、微分幾何学を用いて熱核展開の高次の項を求める方法と、楠岡-Stroockによるマリアバン解析の展開方法が研究されている。

エキゾッチクオプションの例　バリアオプション

■より複雑なデリバティブをエキゾチックデリバティブと呼ぶ。

■例えば、現在の株価を100円として、ストライク100円のコールオプションを購入するが、値下がりリスクは低いと考えた場合、オプション満期までの間に一度でも株価が80円以下に下がったらコールオプションが消滅するデリバティブを考えよう。

■このような商品をバリアオプション（ここに挙げた例は特にDownAndOut CallOption）と呼ぶ。

■消滅するリスクがある分だけ、通常のコールオプションに比べて安くなる。

■ブラックショールズモデルの場合、反射原理を用いて解析的に答えを求めることができる。

■しかし、スマイルに適合したモデルを用いる場合、数値解析を用いる必要がある。ここでは、ローカルボラティリティモデルの場合に説明しよう。

数値計算方法～ツリー、偏微分方程式

■ひとつの方法は、ツリーを使う方法。

■すなわち、最初に説明した2項モデルを、時間間隔を短くして、かつローカルボラティリティモデルに適合した離散化ができる。（Derman-Kaniのインプライドツリーの方法）

■Derman自身による自伝「物理学者、ウォール街を往く」に、そのモデルを考えた頃の話が載っている。

■もうひとつの方法は、偏微分方程式を用いる方法

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma(t,S)^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

$$C(T,S) = (S-K)^+$$

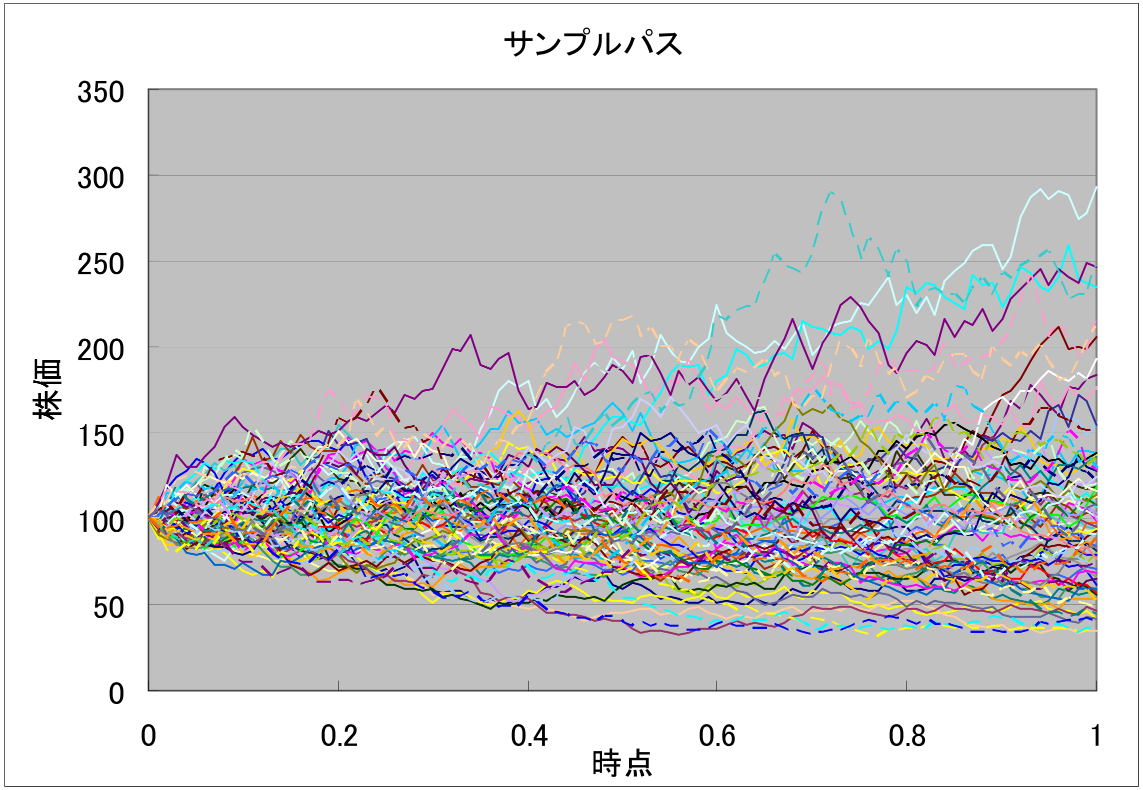
$$C(t,S) = 0 \quad 0 \le t \le T, \ \ S \le 80$$

■バリアオプションの場合、上記のような境界条件つきの放物型偏微分方程式を解くことになる。

■どちらも、モデルが4ファクター以上になると難しい。

数値計算方法～モンテカルロシミュレーション

- 例えば、以下のようにサンプルパスを多数発生させ、80円以下になったらキャッシュフローを0とし、その他はコールオプションのペイオフを計算し、最後に平均を取る。



- 乱数列には、low discrepancy列などが使われる。
- 最近では、楠岡近似というLie代数やHopf代数を用いた期待値計算の近似方法も研究されている。

Corporate and Investment Banking

その他

- 1ディールあたり短時間で計算できなければいけない。大量のディールの日々の時価や、リスク指標、数々のシミュレーションを行う必要があるため、1ディールあたり1時間も掛かると、使い物にならない。
- デリバティブの時価や主要なリスク指標を、その金融機関が抱える全ポートフォリオに関して、一晩で計算する必要がある。
- さらに、マーケットに正確にキャリブレートできている必要がある。そうでないとミスプライスしてしまう。
- さらに、数多くのリスク指標を計算するため、その精度も要求される。数値計算結果で微分の精度を保つのは非常に難しい。
- 原資産(株、為替、金利、クレジット、コモディティ等々)によって、それぞれマーケットも異なるのでモデルも異なり、商品性もそれぞれ異なる。

Corporate
and Investment
Banking

BNP PARIBAS

結論

- 最も単純な2項モデルを用いることにより、デリバティブの価格と複製戦略の関係を述べた。
- 2項モデルを連続時間モデルにすることにより、ブラウン運動を導入し、確率微分方程式を用いてモデルを記述。
- 最もスタンダードなモデルである、ブラックショールズモデルの場合に偏微分方程式との関係を述べ、ブラックショールズ式を導いた。
- しかし、実際のマーケットにはボラティリティスマイルがあるため、新たなモデルが必要であり、その例として、ローカルボラティリティモデルと確率ボラティリティモデルがある。
- インプライドボラティリティの漸近展開には、微分幾何学やマリアバン解析との関係があり、今でも研究が進んでいる。
- エキゾチックオプションの場合には、解析的な解が存在しないことから数値計算を用いる必要があり、偏微分方程式やモンテカルロ法を用いる。
- その他、デリバティブの価格付けに伴ういろいろな困難を紹介。

Corporate
and Investment
Banking

参考文献

- 数理ファイナンスに関しては、

Baxter, Rennie： Financial Calculus, Cambridge

Shreve, S: Stochastic Calculus for Finance I, II, Springer

関根順：数理ファイナンス、培風館

- 実務的に近い本として

Gatheral J: The volatility surface, Wiley Finance

Brigo, Mercurio: Interst Rate models - Theory and Practice

- ローカルボラティリティモデルについて

Dupire B: Pricing and Hedging with Smile, Mathematics of Derivative Securities, Cambridge

- SABRモデルについて

Hagan, Kumar, Lesniewski, Woodward: Managing smile risk, Wilmott magazine

BNP PARIBAS

Corporate and Investment Banking